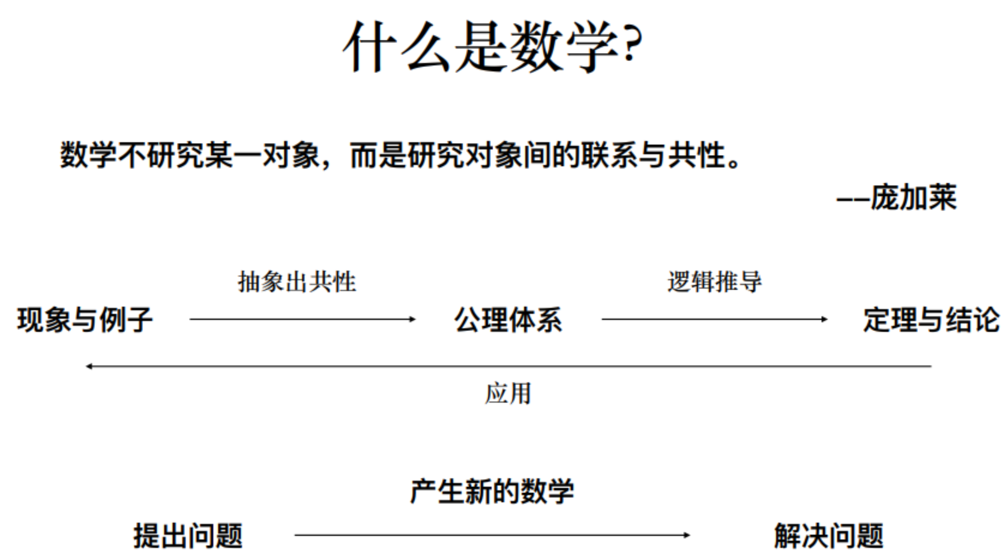
2021 秋数学分析 B1 第 1 次习题课讲义

宗语轩[1]



0. 序

从“1+1=2”谈起[2]

——高等数学与初等数学的区别，联系与衔接

“1+1=2”是我们接触数学的起点，但老师们几乎都是通过数数或是举具象的例子这样直观的方式来告诉我们什么是“1+1=2”，而没有深入讲解加法的定义。我们对几何图形的

[1]就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系. 讲义如有错误欢迎联系我:zyx240014@mail.ustc.edu.cn. 我的个人主页:http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html

[2]本文发表于中国科大数院学生会主编的《薪火相传》(2021 版)

了解，亦是通过直观感受图形，以及学习老师们所列举的性质、结论，而没有探究其背后的几何原理。至于有理数和无理数，数学教材带给我们的也仅仅是它们的存在性，并没有探究两者间的联系，甚至有很多老师都没有阐明有理数和无理数本质的区别（例如，很多学生并不了解任何有理数都能表示成 $\frac{p}{q}, (p,q)=1$ 的形式）。初等数学里这些直观上“显然”的内容却恰恰是学生踏入高等数学的大门后所需要细究的。很多同学对这一转变无法适应，这导致他们在学习第一门核心基础课程——数学分析时就开始掉队。

当然，笔者列举这些事实并不是要否定初等数学。相反，在初等数学教育阶段，绝大部分学生对数学的认知能力非常有限，他们很难绕开形象来接触抽象。因此，在这样的起步阶段，是需要通过这样直观的方式去引导学生学习数学的。较之于高等数学，初等数学所学习的内容就好比练武中蹲马步、打沙袋、举石锁的过程。如果急功近利，过早地去练复杂的招式，那么马脚就会逐渐败露，最后很可能一事无成。对此，笔者觉得很有必要从多个角度谈谈高等数学和初等数学的区别与联系，以及如何完成这二者的衔接。

我们先从**定义本身**讲起：

初等数学：以“1+1=2”为既定事实建立的数学体系。通俗而言，就是更加**直观**，更强调数学的**工具性**。

高等数学：研究何为“1+1=2”及其衍生出的一系列数学内容。较之初等数学更加**抽象**，更重视**数学的本原性**。

初等数学直接承认了很多直观上成立的命题。例如，初等函数连续性是可以直接使用的，其衍生出的各类性质也被视为“显而易见”。而**高等数学正是去研究这些在初等数学体系中视为“直观上成立”的定义及性质，很多定义还被作为起点来构建出新的体系**。例如，把“1+1=2”作为抽象代数课程的起点，以此来引申出“群环域”的概念；在函数连续性、可导性、可积性的定义中，引入“无穷小”这一工具，亦是为了真正区分直观上的两个“1”，把“1+1=2”真正抽丝剥茧。**同时，在新的体系下，又衍生出新的定义、性质及结论。这些新的定义、性质及结论相比初等数学而言，不失直观却更为本原。**

同时，初等数学中的内容或多或少都会被运用到高等数学中去。因为抽象的探索，脱不开直观的想象；本原的洞察，少不了工具的驾驭。就如初等数学中直观化和形象化的方法，亦作为工具被用于高等数学的研究中。再如“变量代换及换元”这一我们在初等数学中学习的技巧，即使在积分及微分的处理中也经常使用，它甚至还起到了关键乃至决定性作用。**这些贯穿整个数学阶段的思想方法及工具，在不同阶段有不同的地位及用途，时而宏观，时而具化，亦或两者兼具。**

再从**学习模式**的角度谈起：

初等数学的教学一般都是以**“简单的定义 $\rightarrow$ 适量的性质及推论 $\rightarrow$ 大量的例子 $\rightarrow$ 衍生出大量课本之外的技巧及结论”**的模式进行。如前所说，这些内容始终是高等数学学习及

数学研究的基本工具，在初等数学的学习阶段，必须**对这些“工具”先要熟练掌握，再要灵活运用，最后融会贯通**。在绝大部分学生几乎不具备抽象思维的时候，这种如同“学工具”的学习模式在初等数学的学习中是适用的。

高等数学的教学一般都是以“**困难的定义** $\to$ **大量的性质及推论** $\to$ **适量的例子** $\to$ **衍生出极少量课本之外的技巧及结论**”的模式进行。高等数学里的课程本身起点很高，因此高等数学的学习绝不能抱着”学工具”的想法，而是要**文火慢炖，勤于思考和探究，最后要融入所学课程的体系和思维方式**，这是第一要义。就如数学分析这一课程，它开门见山地引入了无穷小的概念，进而定义了极限。要想尽快适应这样的转变，就要在学习过程中深入课程，适应体系，探明本质。

为了让同学们更好地适应高等数学的学习，笔者还想谈一谈如何更好地进行初高等数学间的衔接:

1. **一定要理解无穷 (包括大和小) 的内涵**，深究无穷性与有穷性的区别，并在无穷性中继续深挖根源。“无穷小”是研究为何“1+1=2”成立（实数的构造）及其衍生出的内容的一个重要手段；

2. **要以工具性的观点运用初等数学，要持求知的态度探索高等数学，切忌高等数学学习“工具化”**；

3. **学习高等数学不能忽视初等数学里常用的直观化和形象化的方法**，他们很有可能为高等数学中一些问题的解决提供了**动机**，再加上数学本身具有理科语言学的特性。因此，具备良好的洞察力及语言逻辑能力是任何阶段的数学学习中不可或缺的一部分；

4. 学习高等数学要学会**探索规律，追溯本质**。看似复杂的体系及问题，其关键往往归结于核心的**处理手段及思维方式**，同时，在学习任何知识过程中都要具备**类比、归纳、演绎以及多维推广**等数学思想方法；

5. 学习完高等数学中的每一门课程，都应该回头**思考课程的真正核心内容，明确课程主线，理清一些重要的定理或命题的地位及用途，并探究其中的联系**。

最后，祝各位 USTCer 在科大四年里能够治学修身，畅游数学之领域，感悟生活之乐趣。

宗语轩

2021.2 于杭州

---

1. 第一次作业讲评

注. 第一次作业参考答案已放在群文件中.

1.1. 格式规范

1. **言简意赅, 切忌跳步**. 谢绝各类【显然易证壬】, 不能省略关键步骤, 同时也不要过度交代与题目无关的东西.
2. **依据充足, 逻辑清晰.** 必要时需注明相应的定理、命题及结论, 逻辑表述上一定要清晰且准确.
3. **语言规范, 符号得当.** 使用数学化的语言, 避免口语化的描述. 在必要时可合理选用规范的逻辑符号和其他数学记号.
4. **其他中学老师强调了 114514 遍的问题.** 字迹清楚，书写整齐，排版合理 ...

对于格式规范的练习, 最好的资源就是教材上的例题, 仔细研究教材例题上数学语言的叙述方式, 并根据自身情况进行适当的模仿和训练.

1.2. 作业中出现的问题

1. **数学归纳法的书写格式不够规范**.
   我们以本次作业中的一道题为例：

   Plus2. 试证明 Bernoulli 不等式: 设 $x \geqslant -1, n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

   $$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

   证明. 我们用**数学归纳法证明**上述命题成立.
   当 $n=1$ **时命题成立**;
   假设 $n=k(k\geqslant 1)$ **时命题成立**, 即 $(1+x)^k \geqslant 1+kx$. 当 $n=k+1$ 时，由归纳假设知

   $$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$$

   即 $n=k+1$ **时命题成立**. 故数学归纳法得证. ∎

   这是规范的数学归纳法书写格式，其中标记黑体的四个步骤一定不能省略.

2. 如上所言，证明中口语化描述偏多, 不会规范及正确使用数学语言及数学符号.

如“无穷大量乘以一个不是无穷小的量, 仍然是无穷大量”以及“a_n 无限逼近于 0”等等. 这些口语化的描述不允许出现在数学证明中, 必须要用严格的 $\forall, \exists$ 等数学符号 (或文字) 通过合适的数学语言进行刻画. 同时还需注意数学符号使用的逻辑顺序, 以及数学符号使用的合理性及规范性. 我们以本次作业中的两道题为例：

1.2.1(2). 用定义证明下面的结论: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$(取)$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,$\forall$(当)$n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$ ∎

标准证明如上, 在用 ”$\varepsilon-N$” 语言证明时, 必须按照“任意——存在——任意——给定精度精确化”四个步骤的顺序进行. 常见错误如下:

- 缺少某个 (些) 逻辑符号, 或者逻辑符号未按照正确顺序使用.
- N 的取值依赖于 n. N 的取值必须是一个给定的常数, 不能依赖于 n, 所以”$\forall\varepsilon>0$” 放在”$\exists N=\ldots$” 之前就是为了固定 ε 的值, 让 N 的取值是一个 (和固定的 ε 相关的) 常数, 便于最后的精确化处理.
- 常见错误格式: 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 只用取 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 即可.
- 用夹逼原理证明. 本题要求用定义法证明, 不应出现夹逼原理.

1.2.5. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, 且 $|b_n|\leqslant M(n=1,2,\ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=0$.

常见错误格式: $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_nb_n|\leqslant M\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$.
错误原因: 收敛性未知或收敛但极限值未知之下, 不能直接对极限形式比较大小关系.
标准证法: $0\leqslant|a_nb_n|\leqslant M|a_n|$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 及夹逼原理 (定理 **1.7**) 知, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=0$.

3. **分类讨论不齐全, 特殊情况欠考虑.**
   - **Plus3** 中用数学归纳法证明忽略了 $n=2$ 时情形的证明;
   - **Plus4** 用构造二次函数方法忽略了二次项为 0 的情形;
   - **1.2.5** 用定义法证明时 $M=0$ 没有单独讨论 ($M=0$ 时 M 不能出现在分母上).

---

2. 判断与命题推断

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

1. 若 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$.
4. $\{a_n\}$ 中任两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{k_n}-a_{l_n})=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$,$a\in\mathbb{R}$.
5. $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.
6. 若 $a_n\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a\neq 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.
7. 无界数列一定是无穷大量.
8. 非负数列极限是非负数，正数列极限是正数.
9. 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列，则 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 有收敛子列.
10. 若对任意 $n,p\in\mathbb{N}^*$, 均有 $|a_{n+p}-a_n|<\dfrac{p}{n^2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

参考答案:

1. $\nRightarrow$. 反例: $a_n=\dfrac{1}{2^n}$; $\quad\nLeftarrow$. 反例: $a_n=1$.
2. $\Rightarrow$. 定义法证明即可; $\quad\nLeftarrow$. 反例: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

3. $\nRightarrow$. 反例: $a_n = (-1)^n$; $\Leftarrow$. 上课例题, 截成两段再用定义证明即可.

4. $\Rightarrow$. 把 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 转化成 Cauchy 列形式, 并利用反证法; $\Leftarrow$. 见 **2**.

5. $\Rightarrow$.$\exists q$ 满足 $l^{-1} < q < 1$ 及 $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_n < a_N \cdot q^{n-N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

6. $\Rightarrow$. 定义法证明即可; $\nLeftarrow$. 反例: $a_n = n$.

7. 错误. 反例:$a_n = n(1-(-1)^n)$.

8. 正确；错误. 反例: $a_n = \dfrac{1}{n}$.

9. $\Rightarrow$; $\Leftarrow$. 定义法证明即可.

10. 正确. 对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall p > 0$, 有 $|a_{n+p} - a_n| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{1}{k^2} < \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{1}{(k-1)k} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. 由 Cauchy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

---

3. 课内复习与延伸

3.1. 实数理论

实数 $\triangleq$ **有序完备域**

- **有序:** 阿基米德序.
- **完备:** 拓扑结构.
- **域:** 代数结构 (四则运算封闭).

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{减法}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{除法}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{极限}} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2+1=0} \mathbb{C}$$

实数的刻画方式

- **十进制小数:** $a_0.a_1a_2\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$.
- **Dedekind 分割:** $A:=\{x\in\mathbb{Q}:x<0,\ x>0\ and\ x^2<2\},B:=\{x\in\mathbb{Q}:x>0\ and\ x^2>2\}$. 则 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\mathbb{Q}$.
- **Cauchy 列:** 例如: a_1 是大于 $\sqrt{2}$ 的有理数, 且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$. 可推知 $a_n\in\mathbb{Q}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{2}$.

实数完备性的六个等价定理

单调有界定理 $\Leftrightarrow$ 区间套定理 $\Leftrightarrow$ 确界原理 $\Leftrightarrow$ 有限覆盖定理 $\Leftrightarrow$ 列紧性定理 $\Leftrightarrow$Cauchy 准则

例 1. $n\in\mathbb{N}^*,\sqrt{n}\notin\mathbb{N}^*\Rightarrow\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}^*$.

证明. 反证: 设 $\sqrt{n}=\frac{p}{q},(p,q)=1$ 且 $p,q\in\mathbb{N}$. 则 $\exists m\in\mathbb{N}^*$, 使得 $m<\frac{p}{q}<m+1$. 而 $q_1:=p-qm\in(0,q)$, 故 $\frac{p}{q}=\sqrt{n}=\frac{p}{q}\frac{p-qm}{p-qm}=\frac{qn-pm}{q_1}:=\frac{p_1}{q_1}$. 由 $q>q_1$ 知 $p>p_1$. 无限循环上述过程. 而 $p,q\in\mathbb{N}$, 由无穷递降法知, 上述过程不能无限进行下去, 矛盾. ∎

例 2 (Dirichlet 定理). 设 x 是给定的无理数, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists p,q\in\mathbb{Z}$, 使得 $|px-q|<\frac{1}{n}$.

证明. 考虑 $\{x\},\{2x\},\ldots,\{nx\}$ 这 n 个互不相同 (为什么?) 的无理数. 由抽屉原理知,$\exists i,j\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, 使得 $0<\{jx\}-\{ix\}<\frac{1}{n}$. 而 $\{(j-i)x\}=\{jx\}-\{ix\}$, 令 $k=j-i$, 则 $\{kx\}<\frac{1}{n}$. 取 $p=k,q=[kx]$, 则 $|px-q|<\frac{1}{n}$. ∎

由**例 2** 得到如下**推论**: 设 x 是给定的无理数, 则集合 $\{m+nx\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

3.2. 数列极限

$$\text{收敛数列的性质}\begin{cases}\text{极限唯一}\\ \text{有界}\\ \text{保序}\\ \text{保四则运算.}\end{cases}$$

$$\text{数列收敛的证明方法}\begin{cases}\text{"}\varepsilon-N\text{" 语言定义法}\\ \text{单调有界定理}\\ \text{Cauchy 收敛准则}\\ \text{夹逼原理}\\ \text{stolz 定理}\\ \text{比值判别法}\\ \text{*Toeplitz 定理}\\ \text{* 上下极限}\end{cases};\ \text{数列发散的证明方法}\begin{cases}\text{"}\varepsilon-N\text{" 语言定义法}\\ \text{无界}\\ \text{Cauchy 收敛准则}\\ \text{子列收敛于不同极限}\end{cases}$$

1. 比较数列收敛速度的核心工具:

把 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ 记作 $a_n<<b_n$. 则 $(\ln n)^l<<n^k<<a^n<<n!<<n^n(k,l>0,a>1)$.

提示. 运用 Stolz 定理或比值放缩法证明. 本题留给读者自行完成.

例 1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n!)^k}{n^n}(k\in\mathbb{N}^*)$.

解. $k=1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;$k\geqslant 2$ 时, 注意到 $\dfrac{(n!)^2}{n^n}\leqslant\dfrac{(n!)^k}{n^n}$, 而

$$\frac{(n!)^2}{n^n}=\frac{\prod\limits_{k=2}^{n-1}k(n+1-k)}{n^{n-2}}\geqslant\frac{(2n-2)^{n-2}}{n^{n-2}}\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty.$$ 由夹逼原理知 $\dfrac{(n!)^k}{n^n}$ 趋于 $+\infty$. ∎

例 2. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln^2(n+1)-\ln^2 n)$.

解. $0<\ln^2(n+1)-\ln^2 n=(\ln(n+1)-\ln n)(\ln(n+1)+\ln n)<2\ln(n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{2\ln(n+1)}{n}$. 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\ln(n+1)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\ln(n+1)}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=0$, 由夹逼原理知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln^2(n+1)-\ln^2 n)=0$. ∎

2. 自然对数的底 e:

在大学教材中, 我们一般把 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 作为 e 的定义. 若进一步想了解自然对数的底 e 的本原和历史, 可以查阅《高观点下的初等数学》,《古今数学思想》及其他有关数学史的书, 这些内容在本讲义中不再赘述.

我们同时考察如下两个数列:

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (n\in\mathbb{N}^*),\quad s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\ (n\in\mathbb{N}^*).$$

显然, 数列 $\{s_n\}$ 严格递增, 且由 $s_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<3$ 知 $\{s_n\}$ 有上界. 由单调有界定理知 $s=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ 存在.

由几何平均—算术平均不等式知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}<\left(\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

因此数列 $\{e_n\}$ 单调递增. 此外, 利用二项式展开, 得

$$e_n=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

由 $\{e_n\}$ 的展开式知, $e_n\leqslant s_n<3$, 故 $\{e_n\}$ 有上界. 由单调有界定理知 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}e_n$ 存在, 即 e 的定义是合理的. 我们利用如下不等式来得到 $s=\mathrm{e}$.

例 1. 证明: $s_n-e_n<\dfrac{3}{2n}$.

引理. $n\in\mathbb{N}^*$, 对 $\forall r_1,r_2,\dots,r_n\in(0,1)$, 均有 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-r_k)\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k$.

提示. 用数学归纳法证明. 引理的证明留给读者自行完成.

证明. 利用 e_n 的二项式展开式, 由引理知

$$e_n=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{t=1}^{k-1}(1-\frac{t}{n})\geqslant 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\sum_{t=1}^{k-1}\frac{t}{n}\right)=s_n-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}>s_n-\frac{3}{2n}.$$

即 $s_n-e_n<\dfrac{3}{2n}$. ∎

又因为 $s_n\geqslant e_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{2n}=0$. 由夹逼原理知 $s=\mathrm{e}$.

为得到 e 的近似值, 利用如下不等式, 我们可用 s_n 的值进行逼近.

例 2. 证明: $0<\mathrm{e}-s_n\leqslant\dfrac{1}{n!n}$.

证明. 左侧不等式显然成立. 下证右侧不等式成立. 对 $\forall m > 0$, 有

$$s_{n+m} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)^k} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

令 $m \to +\infty$, 得 $\mathrm{e} - s_n \leqslant \dfrac{1}{n!n}$. ∎

因此, 用 s_{10} 逼近 e 所产生得误差小于 $10^{-7} \Longrightarrow \mathrm{e} = 2.71828\ldots$.
同时, 利用上述不等式我们还可以证明如下命题:

例 3. 证明: e 是无理数.

证明. 用反证法. 假设 $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}^*$. 由于 $2 < e < 3$, 因此 $q \geq 2$.
由 $0 < \mathrm{e} - s_n \leqslant \dfrac{1}{n!n}$ 得

$$0 < q!(\mathrm{e} - s_q) \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}.$$

但是

$$q!(\mathrm{e} - s_q) = (q-1)!p - q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q})$$

是整数, 矛盾. ∎

由此可知, 数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 各项都是有理数, 但它们的极限却是无理数. 这又一次说明有理数域是不完备的.

以下习题供大家课后思考:

1. 证明: 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格递减数列.
提示. 用几何平均—算术平均不等式证明即可.

易知 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由此可得 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
取对数得 $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$. 我们把推广后的情形留给读者自行完成.

2. 设 $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $k = 1, 2, \ldots$. 证明不等式:

$$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}.$$

提示. 先证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$.

对 $\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ 分别取 $k=1,2,\ldots,n$. 累加后得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

3. 通过上述不等式来解决如下问题.

(1) 令 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1) \quad (n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: $\gamma := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在;

(2) 利用 (1) 证明: $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n+\gamma+\epsilon_n$, 其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon_n = 0$;

(3) 利用 (2) 证明: $x_n = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} = \ln 2\sqrt{n}+\frac{\gamma}{2}+\epsilon_n$.

接下来，我们可以运用以上所有结论来解决下列所有习题.

4. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n!\,\mathrm{e}-[n!\,\mathrm{e}])$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

5. 记 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, 用 k_n 表示使得 $H_k \geqslant n$ 成立的最小下标. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = \mathrm{e}.$$

提示.$H_{k_n}-\frac{1}{k_n} < n \leqslant H_{k_n}$.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1), n=2,3\ldots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$.

7. 设 $S_n = 1+2^2+\cdots+n^n$. 证明: 当 $n\geqslant 3$ 时, 有

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)<S_n<n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

提示. 记 $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, 则有 $\frac{1}{4}=a_2<a_3<\cdots<a_n<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.3. 补充例题

例 1. 证明: 设数列 $\{a_n\}$ 是正项有界数列, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$.

证明. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, 0<a_n\leqslant M$. 由 $a_n>0$ 知 $\{S_n\}$ 单调递增.

- 若 S_n 无界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{S_n}=0$. 因为 $0<\frac{a_n}{S_n}\leqslant\frac{M}{S_n}$, 由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$.
- 若 S_n 有界, 由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛, 并记 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=a$. 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$,

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=a-a=0$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n}=0$. ∎

例 2. 设 E 是非空有上界的数集, 且它的上确界 a 不在 E 中. 求证: 在 E 中存在数列 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 a.

证明. 由于 a 是 E 的上确界, 故对 $\forall\varepsilon>0,\exists x\in E$, 使得 $a-\varepsilon<x<a$.
取 $\varepsilon_1=1,\exists x_1\in E$, 使得 $a-\varepsilon_1<x_1<a$.
取 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},a-x_1\right\},\exists x_2\in E$, 使得 $a-\varepsilon_1<x_2<a$.
...
取 $\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\right\},\exists x_n\in E$, 使得 $a-\varepsilon_{n-1}<x_n<a$.
...
由此得到 E 中的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则 $a-x_n<\varepsilon_n<a-x_{n-1}\Rightarrow x_n>x_{n-1}$.
又因为 $0<a-x_n\leqslant\varepsilon_n<\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.
故 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 a. ∎

例 3. 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 无界.

证明. $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $0<\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}\leqslant\frac{1}{3}$. 因此 $\max\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n},\frac{a_{n+2}}{a_n}\right\}\geqslant\frac{3}{2}$.
我们定义数列 $\{b_n\}$, 其中 $b_N=a_N$, b_{N+1} 是 a_{N+1},a_{N+2} 中的最大者. 若 $a_{N+2}>a_{N+1}$,

则 b_{N+2} 是 a_{N+3},a_{N+4} 中的最大者; 否则,b_{N+2} 是 a_{N+2},a_{N+3} 中的最大者. 以此类推下去，得到数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. 而当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \geqslant \dfrac{3}{2}$. 故 $b_n \geqslant (\dfrac{3}{2})^{n-N} b_N \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. 因此数列 $\{b_n\}$ 无界, 所以数列 $\{a_n\}$ 无界. ∎

例 4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明. 令 $x_{2n} - x_{2n-2} = a_{2n}, x_{2n-1} - x_{2n-3} = a_{2n-1}$. 则

$$\left|\frac{x_{2n}}{2n}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=2}^{n} a_{2k} + x_2}{2n}\right| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} |a_{2k}| + |x_2|}{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

同理, $\left|\dfrac{x_{2n-1}}{2n-1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. 故 $\left|\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{x_n}{n}\right| + \left|\dfrac{x_{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{x_n}{n}\right| + \left|\dfrac{x_{n-1}}{n-1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$. ∎

例 5. 设数列 $\{y_n\}$ 满足 $y_n = 2x_n + x_{n-1}$, 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛.
注. 本题在课堂上已给出用 stolz 定理的证明方法, 下面我们用定义法证明该命题成立.

证明. 不妨 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. 否则, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A \neq 0$, 则令 $(y_n - A) = 2(x_n - \dfrac{A}{3}) + (x_{n-1} - \dfrac{A}{3})$ 即可. 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 故有

$$2|x_n| - |x_{n-1}| \leqslant |2x_n + x_{n-1}| = |y_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $N_2 = N_1 + [\log_2 \dfrac{3}{2\varepsilon}(|x_{N_1}| - \dfrac{\varepsilon}{3})] + 1$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|x_n| - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{1}{2}\left(|x_{n-1}| - \frac{\varepsilon}{3}\right) \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-N_1}}\left(|x_{N_1}| - \frac{\varepsilon}{3}\right) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

即 $|x_n| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. ∎

4. 课后思考

4.1. Cesàro 求和极限

设 $\{a_n\}$ 为实数数列，我们定义算术平均值数列 $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

注: 课堂上已证明如下命题: 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = a$. 并举了逆命题不成立的反例. 现在我们考虑如下问题:

1. 是否存在数列 $\{a_n\}$ 使得对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_n > 0$ 且 $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ 但 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$?

2. 对 $k \in \mathbb{N}^*$, 记 $b_k = a_{k+1} - a_k$. 证明: 对 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $a_n - \sigma_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k b_k$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} n b_n = 0$, 并且 $\{\sigma_n\}$ 收敛. 证明: $\{a_n\}$ 亦收敛.

4. 设数列 $\{n b_n\}$ 有界, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sigma$.

4.2. 根式的逼近

给定正实数 a，设数列 $\{x_n\}$ 满足迭代公式 A: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. 其中 $x_1 > \sqrt{a}$.

1. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 递减趋于 $\sqrt{a}$. 这表明, 从任意大于 $\sqrt{a}$ 的初值出发，可用迭代公式 A 近似地计算 $\sqrt{a}$.

2. 定义逼近的误差项 $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$. 证明: $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$.

3. 证明: 如果 $b = 2\sqrt{a}$, 那么 $\varepsilon_{n+1} < b\left(\dfrac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$. 这表明, 迭代公式 A 收敛速度非常快.

4. 计算 $\sqrt{3}$ 的精确到小数点后 5 位的近似值.

给定 $a > 1, y_1 > \sqrt{a}$，设数列 $\{y_n\}$ 满足迭代公式 B: $y_{n+1} = \dfrac{a + y_n}{1 + y_n} = y_n + \dfrac{a - {y_n}^2}{1 + y_n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

5. 证明: 数列 $\{y_{2n-1}\}$ 是递减数列.

6. 证明: 数列 $\{y_{2n}\}$ 是递增数列.

7. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \sqrt{a}$.

8. 试讨论迭代公式 B 逼近 $\sqrt{a}$ 的收敛速度, 并与迭代公式 A 进行比较.